Иванов Александр 511 группа.

Задача Кеплера. Вывод закона сохранения энергии из принципа наименьшего действия и однородности времени.

Задача Кеплера

Сначала вычислим траекторию планеты. Для этого воспользуемся законом сохранения энергии:

= const, где – приведенная масса.

Используем также закон сохранения момента:

.

;

; (1)

.

Решая 1-ое уравнение относительно , получаем, что

,

либо после интегрирования (2)

Так как , то во 2-ом уравнении можно перейти к :

*.*

Следовательно .

Отсюда получим значение .

Тогда получаем, что или причем знак равенства соответствует здесь «точкам поворота» траектории при в которых функция переходит от увеличения к уменьшению либо наоборот.

Очевидно, что неравенство (3) имеет смысл лишь при условии, что дискриминант трехчлена является неотрицательным.

Действительно, если дискриминант то получается, что квадратный трехчлен не имеет действительных корней, а энергия . Следовательно, при любых трехчлен имеет отрицательное значение и неравенство (2) не выполняется.

Таким образом, мы имеем, что

.

В данном случае исследуемых трехчлен имеет действительные корни и , причем , .

Если , то оба корня являются положительными и неравенство (3) выполняется при (4), где для определенности мы приняли . В данном случае траектория полностью лежит внутри кольца (4) и движение является фиктивным.

Если , то это означает, что орбита является эллипсом и движение финитно.

Если , то очевидно, что корни , имеют разные знаки и решение неравенства (3) имеет вид . В этом случае движение инфинитно – траектория риходит из бесконечности и уходит в бесконечность.

При имеем и траектория является параболой.

При имеем и траектория имеет вид гиперболы.

Каждая из масс описывает с точностью до постоянного множителя такую же траекторию, что и фиктивная приведенная масса, с фокусом расположенным в центре инерции системы.

Вывод закона сохранения энергии из принципа наименьшего действия и однородности времени

Однородность времени означает, что функция Лагранжа замкнутой системы не зависит явно от времени. Тогда полная производная функции Лагранжа по времени будет иметь вид:

(1)

Выразим из уравнения Лагранжа через и подставим в 1-ое уравнение. Из этого получается:

,

Либо получаем, что

Тогда из этого следует, что .

Величина (2) остается неизменной при движении системы.

Механические системы, энергии которых сохраняются, называют консервативными.

Подставляя в (2) выражения для функции Лагранжа для замкнутой системы, получаем:

.

Отсюда видно, что энергия системы представляет собой сумму кинетической энергии, зависящей от скоростей, и потенциальной, зависящей только от координат точек системы.